ハーレム問題の解

本の 119 ページに出てくるハーレム問題はスルタンがどういう選択をすれば一番の美女を自分のハーレムに入れることができるかというものでした。

順番にひとりずつ会うのですが、早い段階で決めてしまうと、その後にもっと美しい女性が

現れる可能性が高いし、いつまでも待っているとすでに一番美しい女性を見逃したかもしれません。

最初のk番目までは見るだけで選択しないとして、l番目で最良値l^*を選ぶ場合の数を求めるものとする。

ただし、$k+1 \le l \le n$とする。

最良値l^*を除く全$n-1$個について$(l-1)$個と$(n-l)$個の２つの部分に分ける方法は

$$\binom{n-1}{l-1} \text{通り} \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

後半の$(n-l)$個はどんな並び方でもよいので、

すべての並び方は　$(n-l)!$ 通り……………………②

前半の$(l-1)$個の中の最良値$(l-1)^*$は最初のk個の中に入っていなければならない。

何故なら、もし$k+1$番目から$(l-1)$番目の間に$(l-1)^*$があると、そこで選択が終了してしまうので、

l番目まで選択が進まないからである。

$(l-1)$個の中の最良値の場所の並び方は　k 通り…………………………③

残りの$(l-2)$個はどんな並び方でもよいので$(l-2)!$通り……………………④

$\therefore l$番目で最良値l^*を選ぶ場合の数は①②③④より、

$$\binom{n-1}{l-1}(n-l)!k\cdot(l-2)! = \frac{(n-1)!}{(n-l)!(l-1)!}(n-l)!k\cdot(l-2)! = k(n-1)!\frac{1}{l-1}$$

これを$k+1 \le l \le n$のlについて和をとると、

$$\sum_{l=k+1}^{n} k(n-1)!\frac{1}{l-1} = k(n-1)!\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots\cdots+\frac{1}{n-1}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

⑤より求める確率は

$$\frac{1}{n!}k(n-1)!(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\cdots\cdots+\frac{1}{n-1})=\frac{k}{n}(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots\cdots+\frac{1}{n-1})$$

$$\approx\frac{k}{n}\log\frac{n}{k}=-\frac{k}{n}\log\frac{k}{n}\equiv P(k) \quad\cdots\cdots⑥$$

$$\because \int_k^n\frac{1}{x}dx<\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}<\int_k^n\frac{1}{x-1}dx$$

$$\log\frac{n}{k}<\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}<\log\frac{n-1}{k-1}$$

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}\approx\log\frac{n}{k}$$

⑥を微分すると、

$$P'(k)=-\frac{1}{n}\log\frac{k}{n}-\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{k}=-\frac{1}{n}(1+\log\frac{k}{n})$$

k	1	k^*	n
$P'(k)$	＋	0	―
$P(k)$	↑	極大	↓

$P'(k)=0$ とおくと、

$$P'(k)=-\frac{1}{n}(1+\log\frac{k}{n})=0$$

$$\log\frac{k}{n}=-1$$

$$k=\frac{n}{e}$$

すなわち、最初の$\frac{n}{e}$人は見るだけにして、次に現れたそれまでに一番の美女を選べば

全体の中で一番の美女を選ぶ確率が一番高くなるのです。